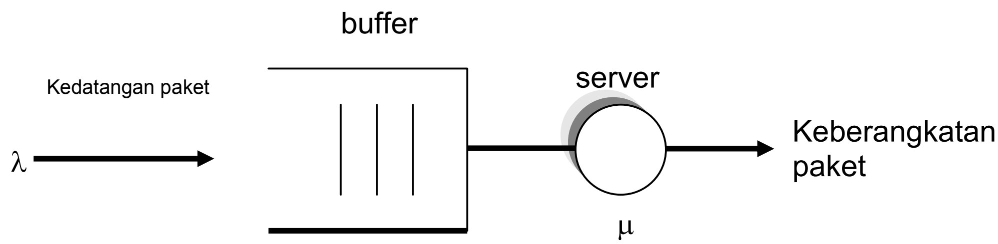
BAB IV
SISTEM TUNGGU (DELAY SYSTEM)



Gambar 4.1 : model sistem tunggu

Pada sistem tunggu, panggilan yang datang pada saat semua sibuk, panggilan tersebut menunggu sampai ada saluran/peralatan yang bebas baru disambungkan. Panggilan yang menunggu dikatakan dalam bentuk antrian (*queue*). Waktu antara panggilan datang ke antrian sampai panggilan menemukan saluran bebas dikatakan waktu tunggu.

4.1 Rumus Tunggu Erlang (Formula Erlang C)

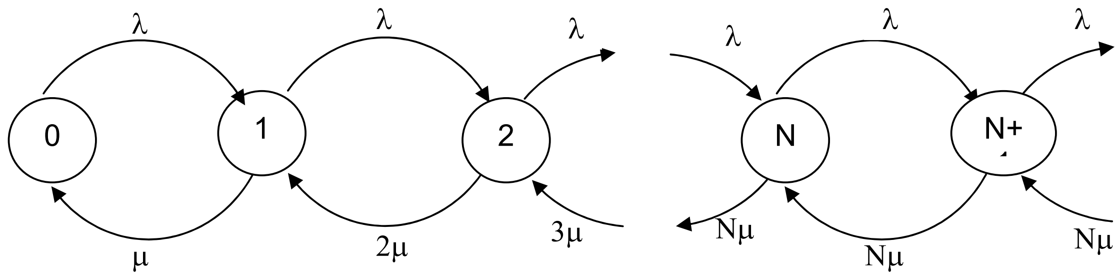
ASUMSI :

1. Pure chance traffic
2. Statistical equilibrium
3. Full availability
4. Panggilan yang datang masuk dalam antrian dan disimpan sampai ada server yang bebas
5. Disiplin operasi
    - rate kedatangan = λ
    - pola waktu pendudukan eksponensial negatif dengan $h = 1/\mu$
    - ada sejumlah N server
    - FIFO (first in first out), panggilan yang menunggu dilayani menurut datangnya panggilan.

4.2 Simbol Untuk Sisstem Tunggu (D.G. KENDALL)

Untuk sistem tunggu secara umum dituliskan A/B/C
Dengan :
A = pola datangnya panggilan
B = pola waktu pendudukan
C = jumlah server

4.3 Diagram Transisi Kondisi



Gambar 4.2 : Digram transisi kondisi

4.4 Persamaan kesetimbangan

Dalam keadaan kesetimbangan statistic, ada dua persamaan yang terjadi, yaitu :

- $\lambda P(n) = \mu(n+1)\, P(n+1)$ …………………n=0,1,2…..N-1
- $\lambda P(n) = \mu N\, P(n+1)$ …………………n= N,N+1,……..

- **$\lambda P(n) = \mu(n+1)\, P(n+1)$ …………………n=0,1,2…..N-1**

untuk n=0

- $\lambda P(0) = \mu\, P(1)$
  $P(1) = \lambda/\mu\, P(0)$
  $P(1) = A\, P(0)$

Untuk n=1

- $\lambda P(1) = 2\mu\, P(2)$
  $P(2) = \lambda/2\mu P(1)$
  $P(2) = A/2\, P(1)$
  $P(2) = A^2/2!\, P(0)$

Untuk n=2

- $\lambda P(2) = \mu\, P(3)$
  $P(3) = \lambda/\mu P(2)$
  $P(3) = A/3\, P(2)$
  $P(3) = A^3/3!\, P(0)$

Sehingga didapatkan harga probabilitas pada saat N server diduduki adalah :

$$\mathbf{P(N)} = \frac{A^N}{N!}\, \mathbf{P(0)} \qquad [4.1]$$

- **$\lambda P(n) = \mu N\, P(n+1)$ …………………n= N,N+1,……..**

- $P(n+1) = \dfrac{\lambda/\mu}{N}\, P(n)$
  $P(n+1) = A/N\;\; P(n)$

- **Untuk n=N, maka**

  P(N+1) = A / N P(N), sedangkan P(N) = $A^N / N!$ P (0) sehingga

  P(N+1) = $\frac{A}{N}\frac{A^N}{N!}$ P (0)

  P(N+1) = $\frac{A^{N+1}}{N.N!}P(0)$

- Untuk n = N+1

  P(N+2) = A / N P(N+1), sedangkan P(N+1) = $\frac{A^{N+1}}{N.N!}$ P(0) sehingga

  P(N+2) = $\frac{A}{N}\frac{A^{N+1}}{N.N!}$ P (0)

  P(N+2) = $\frac{A^{N+2}}{N^2.N!}P(0)$

- Untuk n= N+x

  $P(N+x)=\frac{A^{N+x}}{N^x.N!}P(0)$

  P(n) $=\left(\frac{A}{N}\right)^x\cdot\frac{A^N}{N!}P(0)$ atau

  P(n) $=\left(\frac{A}{N}\right)^n\frac{N^N}{N!}P(0)$

Sehingga didapatkan harga probabilitas pada saat N server dan x buffer diduduki adalah:

$$P(N+x)=\left(\frac{A}{N}\right)^x\cdot\frac{A^N}{N!}P(0) \qquad [4.2]$$

- jadi ada 2 harga P(n), yaitu :
  1. $P(n)=\frac{A^n}{n!}p(0)$ untuk n= 0 s/d N-1
  2. $P(n)=\left(\frac{A}{N}\right)^n\frac{N^N}{N!}P(0)$ atau $P(N+x)=\left(\frac{A}{N}\right)^x\cdot\frac{A^N}{N!}P(0)$ untuk n= N s/d ~

- **BERAPA HARGA P(0)….?**

Note : Bila tidak ada batas antrian, maka n=0 s/d ~

$$\sum_{n=0}^{\sim}P(n)=\sum_{n=0}^{N-1}P(n)+\sum_{n=N}^{\sim}P(n)=1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}\frac{A^n}{n!}P(0)+\sum_{n=N}^{\sim}\left(\frac{A}{N}\right)^x\frac{A^N}{N!}P(0)=1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}\frac{A^n}{n!}+\sum_{n=N}^{\sim}\left(\frac{A}{N}\right)^x\frac{A^N}{N!}=\frac{1}{P(0)}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}\frac{A^n}{n!}+\sum_{x=0}^{\sim}\left(\frac{A}{N}\right)^x\frac{A^N}{N!}=\frac{1}{P(0)}$$

$$P(0)=\frac{1}{\sum_{n=0}^{N-1}\frac{A}{n}+\sum_{x=0}^{\sim}\left(\frac{A}{N}\right)^x\frac{A^N}{N!}} \qquad [4.3]$$

untuk mencapai kestabilan statistik, A/N <1, maka :

$$\sum_{x=0}^{\sim}\left(\frac{A}{N}\right)^x =1+\frac{A}{N}$$

$$=\frac{N}{N-A}$$

sehingga :

$$P(0)=\frac{1}{\sum_{n=0}^{N-1}\frac{A^n}{n!}+\frac{A^N}{N!}\cdot\frac{N}{N-A}} \qquad [4.4]$$

Note : Bila ada batas antrian,(jumlah buffer x sampai pada k), maka n dari

0 s/d k

$$\sum_{n=0}^{k}P(n)=\sum_{n=0}^{N-1}P(n)+\sum_{n=N}^{k}P(n)=1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}\frac{A^n}{n!}P(0)+\sum_{n=N}^{k}\left(\frac{A}{N}\right)^n\frac{N^N}{N!}P(0)=1 \quad \text{atau}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1}\frac{A^n}{n!}+\sum_{x=0}^{k}\left(\frac{A}{N}\right)^x\frac{A^N}{N!}=\frac{1}{P(0)}$$

$$P(0) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N-1} \frac{A^n}{n} + \sum_{x=0}^{k} \left(\frac{A}{N}\right)^x \frac{A^N}{N!}} \qquad [4.5]$$

4.5 Probabilitas Dilayani (P_d)

Panggilan atau data masih bisa dilayani sampai kondisi N-1 saluran/server diduduki. Sehingga probabilitas dilayani adalah :

$P_d = P(0) + P(1) + ... + P(N-1)$

$$= P(0)\left\{1 + A + \frac{A^2}{2!} + ... + \frac{A^{N-1}}{(N-1)!}\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{A^n}{n!} \cdot P(0) \qquad [4.6]$$

4.6 Probabilitas Menunggu (P_t)

Panggilan yang datang akan menunggu apabila seluruh saluran atau server telah diduduki.

- Bila tidak ada batas antrian, probabilitas menunggu D_N

$P_t = P(N) + P(N+1) + P(N+2) + ...P(\sim)$

$$= \frac{A^N}{N!} P(0) + \frac{A^{N+1}}{N.N!} P(0) + \frac{A^{N+2}}{N^2.N!} P(0) + \ldots\ldots$$

$$= \frac{A^N}{N!} \sum_{x=0}^{x=\sim} \left(\frac{A}{N}\right)^x \cdot P(0) \Rightarrow P_t = \frac{A^N}{N!} \cdot \frac{N}{N-A} \cdot P(0) \qquad [4.7]$$

***bila ada batas antrian**

$P_t = P(N) + P(N+1) + P(N+2) + ... + P(k)$

$$= \frac{A^N}{N!} P(0) + \frac{A^{N+1}}{N.N!} P(0) + \frac{A^{N+2}}{N^2.N!} P(0) + \ldots + P(k-1)$$

$$= \frac{A^N}{N!} \sum_{x=0}^{x=k-1} \left(\frac{A}{N}\right)^x .P(0) \qquad [4.8]$$

4.7 Probabilitas Blocking (P_b)

Bila tidak ada batas antrian maka probabilitas blocking = 0
Bila ada batas antrian maka probabilitas blocking terjadi pada kondisi semua server dan semua buffer telah diduduki, sehingga probabilitas blocking = P(n) dimana n adalah kondisi seluruh server dan buffer diduduki n=N+k

$$P(n) = \frac{\left(\frac{A}{N}\right)^n \cdot \frac{N^N}{N!}}{\sum_{n=0}^{N-1} \frac{A^n}{n!} + \sum_{x=0}^{k} \left(\frac{A}{N}\right)^x \cdot \frac{A^N}{N!}} \qquad [4.9]$$

4.8 Hubungan probabilitas blocking dengan Formula Erlang B

$$P_t = P(0) \cdot \frac{A^N}{N!} \cdot \frac{N}{N-A}$$

$$= \frac{\frac{A^N}{N!} \cdot \frac{N}{N-A}}{\sum_{n=0}^{N-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{A^N}{N!} \cdot \frac{N}{N-A}}$$

$$= \frac{\frac{A^N}{N!} \cdot \frac{N}{N-A}}{\sum_{n=0}^{N} \frac{A^n}{n!} - \frac{A^N}{N!} + \frac{A^N}{N!} \cdot \frac{N}{N-A}} \times \frac{\frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{A^n}{n!}}}{\frac{1}{\sum_{n=0}^{N} \frac{A^n}{n!}}}$$

$$= \frac{E_1(N) \cdot \frac{N}{N-A}}{1 - E_1(N) + E_1(N) \cdot \frac{N}{N-A}} \times \frac{\frac{N-A}{N}}{\frac{N-A}{N}}$$

$$= \frac{E_1(N)}{\frac{N-A}{N} - \frac{N-A}{N} E_1(N) + E_1(N)}$$

$$= \frac{E_1(N)}{1 - \frac{A}{N} - \left(1 - \frac{A}{N}\right)E_1(N) + E_1(N)}$$

$$= \frac{E_1(N)}{1 - \frac{A}{N} - E_1(N) + \frac{A}{N}E_1(N) + E_1(N)}$$

$$= \frac{E_1(N)}{1 - \frac{A}{N} + \frac{A}{N}E_1(N)} \Rightarrow P_t = \frac{E_1(N)}{1 - \frac{A}{N}\left(1 - E_1(N)\right)} \qquad [4.10]$$

- bila E_1 (N) diganti dengan R/A, maka :

$$P_t = \frac{E_1(N)}{1 - \frac{A}{N}\left(1 - E_1(N)\right)}$$

$$= \frac{\frac{R}{A}}{1 - \frac{A}{N}\left(1 - \frac{R}{A}\right)}$$

$$= \frac{\frac{R}{A}}{1 - \frac{A}{N} + \frac{R}{N}}$$

$$= \frac{R}{A\left(1 - \frac{A}{N} + \frac{R}{N}\right)} \times \frac{N}{N}$$

$$P_t = \frac{R \cdot N}{A(N - A + R)} \qquad [4.11]$$

4.9 Rumus J.D LITTLE

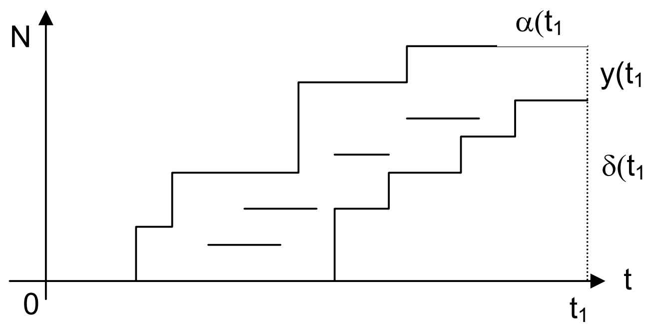
J.D LITTLE menyatakan :
Jumlah rata-rata pelanggan dalam suatu sistem antrian sama dengan rate rata-rata datangnya panggilan pada sistem tersebut kali waktu rata-rata pelanggan dalam sistem tersebut.

$$\overline{N} = \lambda \cdot \overline{t}_s \qquad [4.12]$$

dimana :

$\overline{N}$ = jumlah pelanggan rata-rata dalam sistem
λ = rate rata-rata datangnya panggilan
t_s = waktu rata-rata pelanggan dalam sistem

note : sistem tidak tergantung macam distribusi probabilitas datangnya panggilan, waktu pendudukan dsb.



Gambar 4.3 : waktu pendudukan

Dalam waktu 0 s/d t_1

$\alpha(t_1)$ = jumlah panggilan yang datang dalam interval (0,t_1)
$y(t_1)$ = jumlah total waktu panggilan berada dalam sistem dalam interval (0, t_1)
$\partial(t_1)$ = jumlah panggilan yang pergi / berakhir dalam interval (0, t_1)

dimana :

$$\frac{\alpha(t_1)}{t_1} = \lambda, \qquad \frac{y(t_1)}{\alpha(t_1)} = t_s, \qquad \frac{y(t_1)}{t_1} = \overline{N}_s$$

maka :

$$\overline{N}_s = \frac{y(t_1)}{t_1} = \frac{t_s.\alpha(t_1)}{t_1} \qquad [4.13]$$

$$\overline{N}_s = \overline{t_s} \cdot \lambda$$

$\bar{t}_s =$ adalah waktu rata-rata dalam sistem, terdiri dari $\bar{t}_p$ atau h dan $\bar{t}_t$, sehingga :

$$\bar{t}_s = \bar{t}_p + \bar{t}_t \qquad [4.14]$$

dimana :
$\bar{t}_p$ atau $h =$ waktu rata-rata pelayanan
$\bar{t}_t =$ waktu tunggu rata-rata dalam antrian (dihitung terhadap semua panggilan)

$$\begin{aligned} \overline{N}_s &= \overline{t_s} \cdot \lambda \\ &= \left(\bar{t}_p + \bar{t}_t\right) \cdot \lambda \\ &= \lambda \cdot \bar{t}_p + \lambda \cdot \bar{t}_t \end{aligned} \qquad [4.15]$$

dimana :
$\lambda \cdot \overline{t_p} = A = \overline{n_p}$ adalah jumlah rata-rata panggilan dalam pelayanan
$\lambda \cdot \bar{t}_t = \overline{n_t}$ jumlah rata-rata panggilan yang menunggu (dalam antrian)

RINGKASAN

HARGA P(0)

- Bila ada batasan jumlah buffer

$$P(0) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N-1} \frac{A^n}{n} + \sum_{x=0}^{k} \left(\frac{A}{N}\right)^x \frac{A^N}{N!}}$$

- Bila tidak ada batasan jumlah buffer
-

$$P(0) = \frac{1}{\sum_{n=0}^{N-1} \frac{A^n}{n!} + \frac{A^N}{N!} \cdot \frac{N}{N-A}}$$

PROBABILITAS DILAYANI

$$P_d = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{A^n}{n!} \cdot P(0)$$

- PROBABILITAS PANGGILAN MENUNGGU D_N BILA TIDAK ADA BATAS ANTRIAN

$$P_t = \frac{A^N}{N!} \cdot \frac{N}{N-A} \cdot P(0)$$

$$P_t = \frac{R \cdot N}{A(N - A + R)}$$

- PROBABILITAS PANGGILAN MENUNGGU D_N BILA ADA BATAS ANTRIAN

$$P_t = \frac{A^N}{N!} \sum_{x=0}^{x=k-1} \left(\frac{A}{N}\right)^x .P(0)$$

- JUMLAH RATA-RATA PANGGILAN YANG MENUNGGU

$$\overline{n_t} = \lambda \cdot \bar{t}_t$$

$$\overline{n_t} = P_t \cdot \frac{A}{N-A}$$

$$\overline{n_t} = \sum_{i=1}^{x} i\, p\,(N+i)$$

- JUMLAH RATA-RATA PANGGILAN DALAM SISTEM

$$\overline{N_s} = A + P_t \cdot \frac{A}{N-A}$$

$$\overline{N_S} = \lambda.\overline{t_p} + \lambda.\overline{t_t} = \sum_{i=1}^{N} i\, p\,(i)$$

- WAKTU TUNGGU RATA-RATA (untuk semua panggilan termasuk panggilan yang tidak menunggu)

$$\overline{t_t} = \frac{\overline{n_t}}{\lambda} = \frac{P_t}{\lambda} \cdot \frac{A}{N-A} = P_t \cdot \frac{\overline{t_p}}{(N-A)}$$

- WAKTU TUNGGU RATA-RATA HANYA DARI PANGGILAN YANG BETUL-BETUL MENUNGGU

$$\overline{t_r} = \frac{\overline{t_t}}{P_t} = \frac{\overline{t_p}}{(N-A)}$$

- PROBABILITAS MENUNGGU LEBIH BESAR DARIPADA WAKTU w

$$P(t > w) = P_t \cdot e^{-(N-A)\, w / t_p}$$

$$= P_t \cdot e^{-w / t_r}$$